DECSAI
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada

Ejercicios de Algorítmica

Fernando Berzal, berzal@acm.org

7 de marzo de 2024

La fórmula maestra

Problema

Resuelva la siguiente recurrencia:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + n^k$$

con $a \geq 1$, $b \geq 2$ y $k \geq 0$.

Pista

Esta recurrencia aparecerá en todos los algoritmos de tipo "divide y vencerás"...

Como en todas las recurrencias en las que aparece un término de tipo $T(n/b)$, realizamos un cambio de variable, $n = b^i$:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + n^k$$

$$T(b^i) = aT\left(\frac{b^i}{b}\right) + (b^i)^k$$

$$T(b^i) = aT\left(b^{i-1}\right) + (b^k)^i$$

$$t_i = at_{i-1} + (b^k)^i$$

Reordenando términos, obtenemos una recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes:

$$t_i - at_{i-1} = (b^k)^i$$

cuyo polinomio característico es

$$p(x) = (x-a)(x-b^k)$$

> NOTA: a es la única raíz derivada del polinomio característico de la recurrencia homogénea, b^k es la raíz derivada de la parte no homogénea de la recurrencia (acompañada de un polinomio de grado 0, la constante 1, de ahí que su multiplicidad sea 1).

Para resolver la recurrencia, diferenciamos dos casos:

- $a \neq b^k$

  Tenemos dos raíces diferentes en nuestro polinomio característico, por lo que la solución a nuestra recurrencia es

  $$t_i = c_1 a^i + c_2 (b^k)^i$$

  Deshacemos el cambio de variable, $i = \log_b n$:

  $$\begin{aligned} T(n) &= c_1 a^{\log_b n} + c_2 b^{k \log_b n} \\ &= c_1 n^{\log_b a} + c_2 n^k \end{aligned}$$

- $a = b^k$

  Tenemos una única raíz con multiplicidad dos, por lo que la solución a nuestra recurrencia es de la forma

  $$t_i = c_1 \cdot (b^k)^i + c_2 \cdot i \cdot (b^k)^i$$

  De nuevo, deshacemos el cambio de variable, $i = \log_b n$:

  $$\begin{aligned} T(n) &= c_1 \cdot b^{k \log_b n} + c_2 \cdot \log_b n \cdot b^{k \log_b n} \\ &= c_1 \cdot n^k + c_2 \cdot n^k \cdot \log_b n \end{aligned}$$

  Una vez resuelta la recurrencia para los dos casos que se pueden presentar, obtenemos la solución general para nuestra "fórmula maestra":

  $$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } a < b^k \\ \Theta(n^k \log_b n) & \text{si } a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^k \end{cases}$$